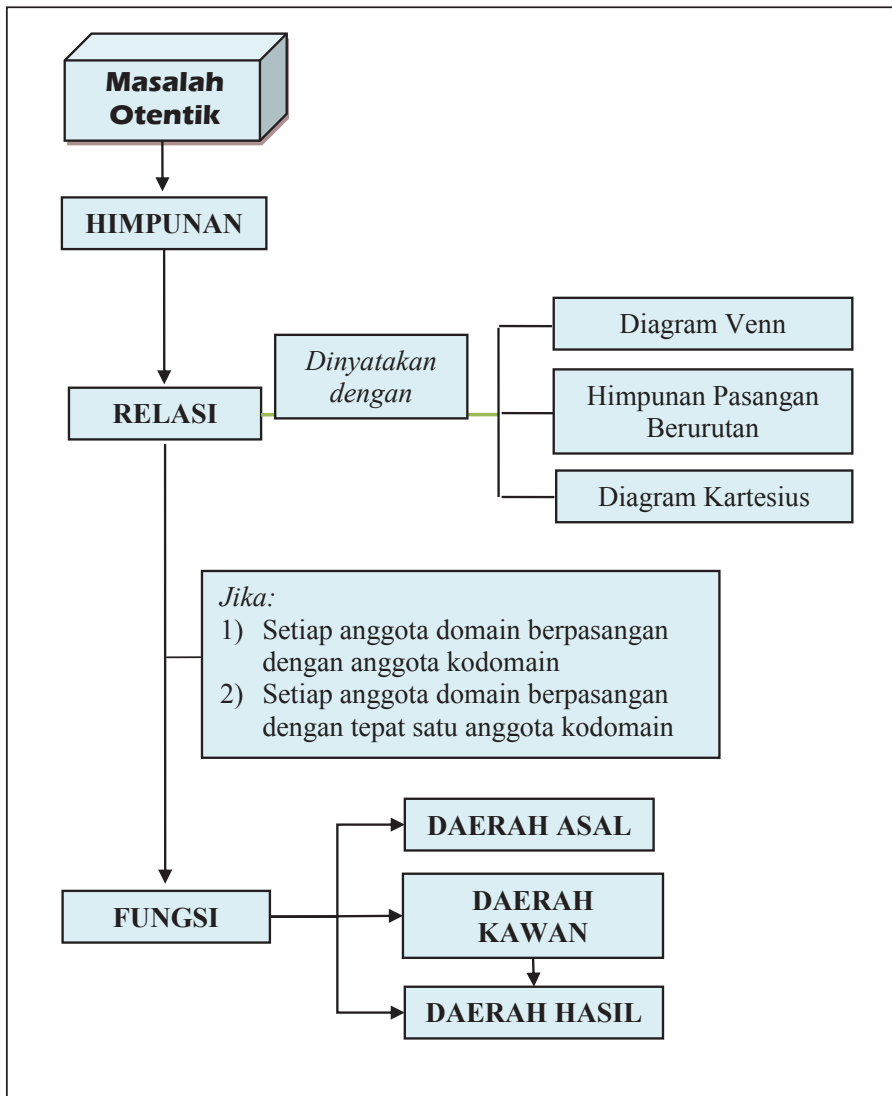
Relasi dan Fungsi

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

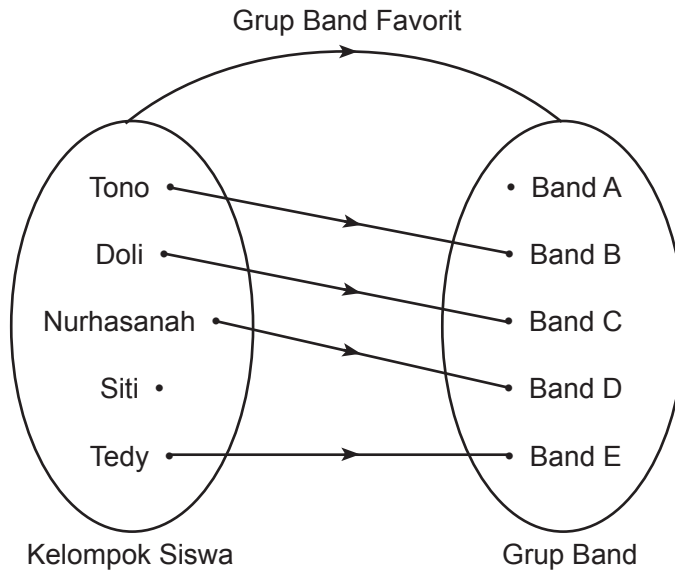
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. memahami daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil suatu relasi antara dua himpunan yang disajikan dalam berbagai bentuk (grafik, himpunan pasangan terurut, atau ekspresi simbolik); 3. mengidentifikasi relasi yang disajikan dalam berbagai bentuk yang merupakan fungsi.	Melalui pembelajaran relasi dan fungsi siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep relasi dan fungsi melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola instalasi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep relasi dan fungsi dalam memecahkan masalah otentik; • menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu relasi; • menyatakan sebuah relasi dengan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram venn; • menuliskan sifat-sifat relasi; • menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep relasi berdasarkan sifat-sifat yang dituliskan sebelumnya; • menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu fungsi; • menyatakan sebuah fungsi dengan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram venn; • menggunakan konsep dan prinsip relasi dan fungsi untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Relasi*
- *Fungsi*
- *Daerah asal (domain)*
- *Daerah kawan (kodomain)*
- *Daerah hasil (range)*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

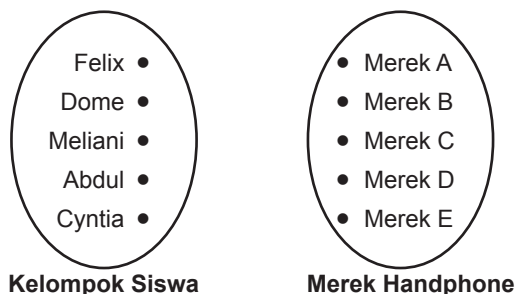
1. Menemukan Konsep Relasi

Gambar di bawah merupakan hubungan antara kelompok siswa dengan kelompok grup band favoritnya.

Gambar 5.1 Grup band favorit sejumlah siswa

Dari gambar di atas, tanpa ada penjelasan yang lebih terperinci dapat ditemukan fakta-fakta berikut.

(1) Grup band favorit Tono adalah Band B.
(2) Grup band favorit Doli adalah Band C.
(3) Nurhasanah band favorit Tono adalah Band D.
(4) Grup band favorit Tedy adalah Band E.
(5) Siti tidak memiliki grup band favorit dari kelompok grup band yang diberikan.
(6) Tidak ada siswa yang grup band favoritnya Band A.

- Coba berdiskusi dengan temanmu, mengapa kita bisa menduga fakta-fakta yang kita temukan di atas?

Bandingkan dengan gambar berikut.

Gambar 5.2 Kelompok siswa dan merek handpone

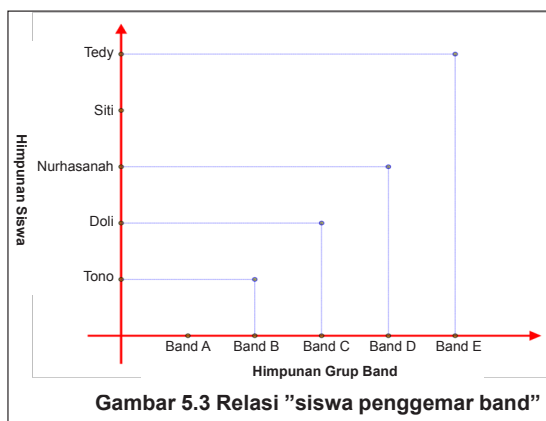
Perhatikan kedua gambar di atas, dari Gambar 5.1 dapat ditemukan beberapa hal karena ada garis panah yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band, dengan aturan menghubungkan adalah: 'Grup band favorit'. Pada Gambar 5.2 tidak dapat ditemukan hubungan antara kelompok siswa dengan merek handpone yang ada karena tidak ada garis berpanah yang menghubungkan yang diberikan.

Aturan menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band pada Gambar 5.1 disebut relasi antara kelompok siswa dengan grup band, relasinya adalah 'grup band favorit'. Relasi yang disajikan pada Gambar 5.1 di atas ditandai dengan sebuah garis berpanah dari kelompok siswa menuju kelompok grup band favorit, relasi seperti ini biasa disebut dengan relasi yang dinyatakan dengan diagram panah. Selain dengan diagram panah, relasi dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan dan dengan menggunakan diagram kartesius seperti berikut.

Relasi pada Gambar 5.1 di atas jika dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan ditunjukkan sebagai berikut.

Himpunan pasangan berurutan kelompok siswa dengan grup band favoritnya adalah: {(Tono, Band B), (Doli, Band C), (Nurhasanah, Band D), (Tedy, Band E)}

Jika dinyatakan dengan diagram kartesius, ditunjukkan sebagai berikut.

Gambar 5.3 Relasi "siswa penggemar band"

Untuk memahami pengertian relasi, perhatikan masalah berikut.

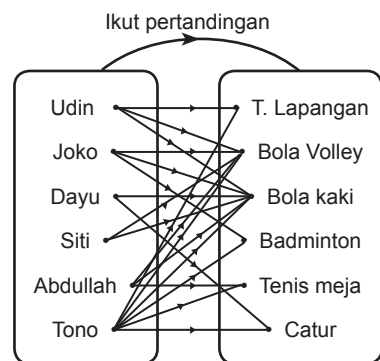
Masalah-5.1

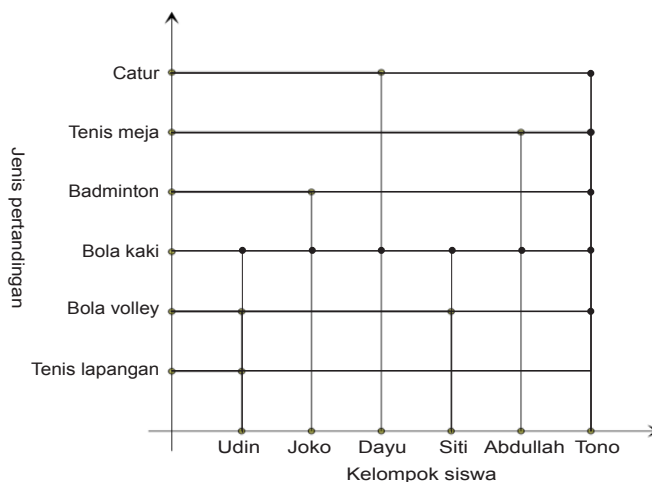
Dalam rangka memperingati HUT RI ke- 67 di Kabupaten Sorong, SMA Negeri 1 Sorong akan mengirimkan siswanya untuk mengikuti pertandingan antar SMA untuk pertandingan sepak bola, bola volley, bulu tangkis, tenis meja, dan catur. Terdapat 6 orang siswa (Udin, Joko, Dayu, Siti, Abdullah, dan Tono) yang akan mengikuti pertandingan tersebut. Pasangkanlah siswa dengan pertandingan yang akan diikuti dengan ketentuan berikut.

1) Udin ikut pertandingan tenis lapangan dan bola volley, Joko ikut pertandingan badminton, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
2) Siti ikut pertandingan bola volley, Dayu ikut pertandingan catur, Joko ikut pertandingan badminton, Abdullah dan Tono ikut pertandingan bola volley.
3) Udin dan Dayu ikut pertandingan bola kaki, Joko ikut pertandingan badminton, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
4) Siti ikut pertandingan bola volley, Joko, Udin, dan Tono ikut pertandingan bola kaki, Tono ikut pertandingan catur.
5) Keenam siswa ikut pertandingan bola kaki.
6) Tono akan mengikuti seluruh pertandingan.

Alternatif Penyelesaian

Alternatif penyelesaian masalah ditunjukkan sebagai berikut.

1) Udin ikut pertandingan bola kaki dan bola volley, Joko ikut pertandingan bulu tangkis, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
   a) Dengan diagram panah
   b) Dengan himpunan pasangan berurutan
      Himpunan pasangan berurutan: {(Udin, bola kaki), (Udin, bola volley), (Joko, badminton), (Dayu, catur), (Siti, bola volley), (Abdullah, tenis meja), (Tono, tenis meja)}

Gambar 5.4 Pasangan setiap siswa yang mengikuti pertan-dingan olah-raga

c) Dengan diagram kartesius

Gambar 5.5 Deskripsi pasangan antara siswa dengan jenis pertandingan

2) Sebagai latihanmu, dengan cara yang sama dengan butir (1) silahkan kerjakan butir (2) sampai butir (6).

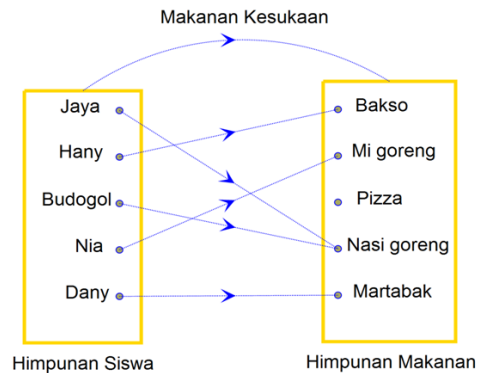
Berdasarkan contoh dan alternatif penyelesaian masalah di atas, ditemukan definisi relasi sebagai berikut.

Definisi 5.1

Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan. Relasi dari *A* ke *B* adalah aturan pengaitan/pemasangan anggota-anggota *A* dengan anggota-anggota *B*.

Catatan:

1) Relasi dapat terbentuk apabila terdapat dua buah atau lebih himpunan/kelompok yang memiliki anggota yang akan dipasangkan satu dengan yang lain. Pada Gambar 5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa dan himpunan kedua yaitu himpunan grup band. Pada Masalah-5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa SMA Negeri 1 Sorong yang akan mengikuti pertandingan, dan himpunan kedua yaitu himpunan olah raga yang akan dipertandingkan.
2) Relasi dapat terbentuk apabila ada aturan yang mengaitkan antara anggota himpunan yang satu dengan anggota himpunan yang lain. Pada Gambar 5.1, nama siswa terhubung dengan grup band favoritnya. Pada Masalah-5.1, siswa yang akan bertanding dihubungkan dengan jenis pertandingan yang akan diikuti.

Perhatikan Masalah 5.1 untuk point (1), terlihat bahwa tanda panah mengarah dari anggota himpunan siswa yang akan ikut bertanding ke anggota himpunan pertandingan yang akan di ikuti. Himpunan yang anggotanya akan dipasangkan pada kegiatan-1 yaitu himpunan siswa disebut dengan daerah asal. Himpunan pertandingan yang akan diikuti disebut dengan daerah kawan. Himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan di daerah asal disebut dengan daerah hasil.

Gambar 5.6 Pasangan antara siswa dengan makanan kesukaan

Dari Gambar 5.6 di atas diperoleh data:
- Relasi himpunan siswa dengan himpunan makanan adalah "Makanan kesukaan".
- Jaya dan Budogol makanan kesukaannya adalah nasing goreng.
- Hany makanan kesukaannya adalah bakso.
- Nia makanan kesukaannya adalah mi goreng.
- Dany makanan kesukaannya adalah martabak.
- Tidak ada siswa yang makanan kesukaannya adalah pizza.

Berdasarkan Gambar 5.6 himpunan siswa disebut dengan daerah asal, himpunan makanan disebut dengan daerah kawan, dan himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan dengan anggota daerah asal disebut dengan daerah hasil. Himpunan daerah asal adalah: {Jaya, Hany, Budogol, Nia, Dany}. Himpunan daerah kawan adalah: {bakso, mi goreng, pizza, nasi goreng, martabak}. Himpunan daerah hasil adalah: {bakso, mi goreng, nasi goreng, martabak}.

Berdasarkan contoh-contoh di atas, ditemukan definisi daerah asal (*domain*), daerah kawan (*kodomain)*, dan daerah hasil (*range*), sebagai berikut.

Definisi 5.2

Daerah asal atau biasa disebut dengan domain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.

Definisi 5.3

Daerah kawan atau biasa disebut dengan kodomain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai relasi yang didefinisikan.

Definisi 5.4

Daerah hasil atau biasa disebut dengan *range* suatu relasi adalah sebuah himpunan bagian dari daerah kawan (kodomain) yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi relasi yang didefinisikan.

Pertanyaan Kritis

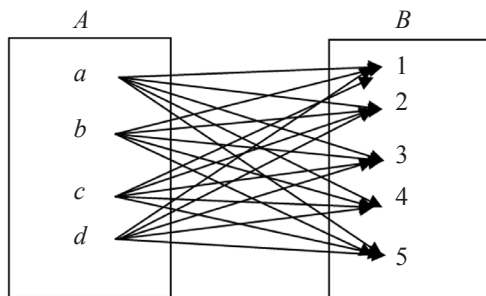
Apakah ada kemungkinan bahwa anggota daerah kawan sama dengan anggota daerah hasil? Berikan alasanmu!

- Untuk lebih memahami definisi di atas, buatlah contoh dan bukan contoh relasi dalam kehidupanmu sehari-hari.

Contoh 5.1

Diberikan himpunan $A = \{a,b,c,d\}$ dan $B = \{1,2,3,4,5\}$. Pasangkanlah secara terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B.

Penyelesaian

Pasangan terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B dapat ditunjukkan pada diagram berikut.

Berdasarkan diagram di atas dapat disimpulkan bahwa banyak anggota himpunan pasangan berurutan anggota himpunan A dan himpunan B sebanyak $4 \times 5 = 40$ buah pasangan. Pasangan dinyatakan dalam bentuk himpunan

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(a,5),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(b,5),\ldots,(d,5)\}$.

Secara umum himpunan pasangan berurutan dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 5.5

Misalkan A dan B dua buah himpunan. Relasi pasangan berurutan dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A ke setiap anggota himpunan B. Dapat ditulis

$A \times B = \{(x,y) \mid \forall\, x \in A \text{ dan } y \in B\}$.

2. Beberapa Sifat Relasi

Sifat-1: Sifat Reflektif

Misalkan R sebuah relasi yang didefinisikan pada himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat refleksif jika untuk setiap $p \in P$ berlaku $(p, p) \in R$.

Contoh 5.2

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $S = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan P berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 5.3

Diberikan himpunan $Q = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan Q dengan $R = \{(a,b) \mid a \text{ kelipatan dari } b, \text{ dengan } a,b \in Q\}$, sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan Q berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 5.4

Diberikan himpunan $C = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{(a,b) \mid a + b < 9, \text{dengan } a,b \in C\}$, maka diperoleh $S = \{(2,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4), (5,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat refleksif sebab ada anggota himpunan C, yaitu 5 tidak berelasi dengan dirinya sendiri atau (5, 5) bukan anggota R.

Sifat-2: Sifat Simetris

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat simetris, apabila untuk setiap $(x, y) \in R$ berlaku $(y, x) \in R$.

Contoh 5.5

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan $R = \{(1,1) , (1,2), (1,3), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat simetris sebab untuk setiap $(x,y) \in R$, berlaku $(y,x) \in R$.

Contoh 5.6

Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan A dengan $R = \{(x, y) \mid x \text{ kelipatan } y, x, y \in A\}$, maka diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat simetris karena $(4,2)$ anggota R tetapi $(2,4)$ bukan anggota R.

Sifat-3: Sifat Transitif

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R bersifat transitif, apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.7

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat transitif sebab $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.8

Diberikan himpunan $C = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tidak memenuhi sifat transitif, sebab terdapat $(1,1) \in R$ dan $(1,2) \in R$, tetapi $(2,1) \in R$.

Sifat-4: Sifat Antisimetris

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat antisimetris, apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,x) \in R$ berlaku $x = y$.

Contoh 5.9

Diberikan himpunan $C = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{ (a,b) \in a$ kelipatan b, $a,b \in C\}$ sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat antisimetris.

Contoh 5.10

Diberikan $S = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan S dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat antisimetris sebab terdapat $(1,2) \in R$ dan $(2,1) \in R$, tetapi $1 \neq 2$.

Sifat-5: Sifat Ekuivalensi

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R disebut relasi ekivalensi jika dan hanya jika relasi R memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

Contoh 5.11

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat refleksif, simetris dan transitif. Oleh karena itu relasi R merupakan relasi ekivalensi.

- Coba kamu bekerjasama dengan temanmu menunjukkan bahwa R memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.

3. Menemukan Konsep Fungsi

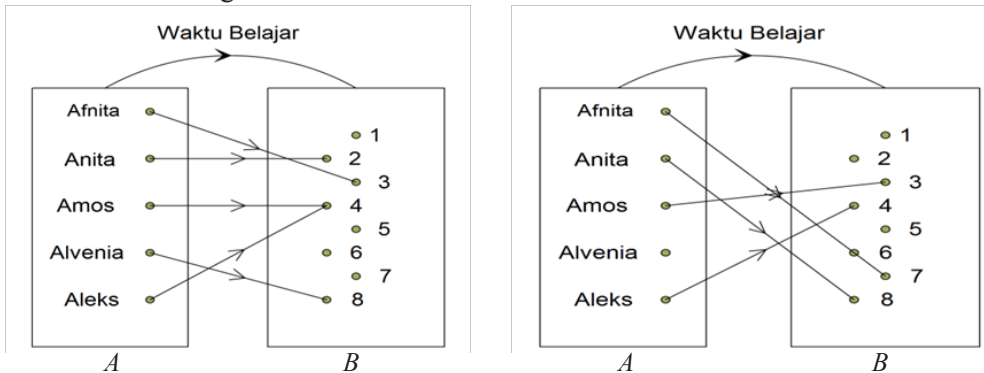
Masalah-5.2

Lima orang siswa yaitu: Afnita, Anita, Amos, Alvenia, dan Aleks merupakan sahabat yang selalu bersama-sama dalam setiap kegiatan sekolah. Bapak Martono adalah guru matematika yang senang dengan persahabatan yang mereka bina karena mereka selalu memiliki nilai paling bagus dari antara teman-teman sekelasnya. Suatu hari bapak Martono ingin mengetahui data-data tentang mereka, hal itu diperlukannya sebagai bahan motivasi untuk teman-teman satu kelas mereka. Data-data yang diinginkan berupa: berapa jam rata-rata waktu belajar mereka dalam satu hari, dan berapa banyak saudara mereka.

1) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya himpunan A, dan lama waktu belajar dalam satu hari adalah anggota himpunan B, himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurut anda yang menggambarkan lama waktu belajar lima orang sahabat itu.
   b. Apakah semua anggota himpunan A pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
   c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan A berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
   d. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan A memiliki pasangan yang yang sama dengan salah satu anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
2) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya himpunan C, dan data tentang banyak saudara mereka ada di anggota himpunan D yang anggotanya,
   $D = \{1, 2, 3, 4\}$.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurut anda yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu.
   b. Untuk semua relasi yang mungkin, apakah semua anggota himpunan C memiliki pasangan dengan anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!
   c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!
   d. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C memiliki pasangan yang yang sama dengan salah satu anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!

Alternatif Penyelesaian

1. Diketahui: A = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

a. Relasi yang mungkin yang menggambarkan rata-rata lama waktu belajar lima orang sahabat itu.

Gambar 5.7: Relasi rata-rata jam belajar

b. Jawabannya adalah tidak. Oleh sebab anggota himpunan *B* telah dibatasi dari waktu 1 s/d 8 jam, maka diantara kelima sahabat itu dan kemungkinan bisa seluruhnya memiliki rata-rata waktu belajar lebih dari 8 jam setiap hari.

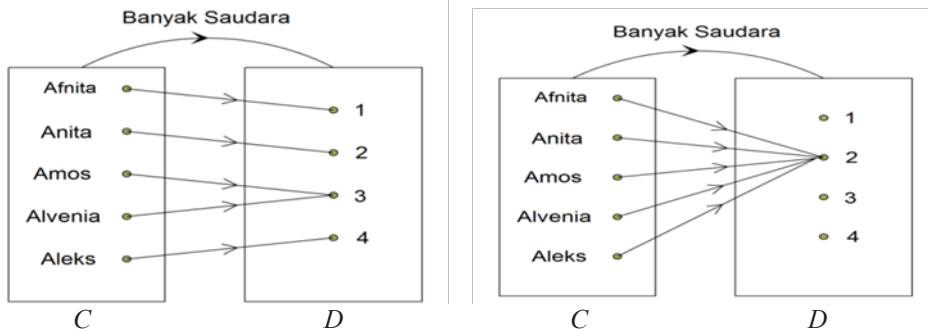
c. Jawabannya tidak. Anggota himpunan *A* dipasangkan dengan anggota himpunan *B* dengan relasi rata-rata lama waktu belajar. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan *A* akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan *B*.

d. Jawabannya ya. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang dimungkinkan sama dengan nilai rata-rata waktu belajar orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan *A* memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan *B*.

2. Kelima sahabat itu membentuk satu himpunan misalnya himpunan *C*, dan data tentang banyak saudara mereka himpunan *D*.

Diketahui: C = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

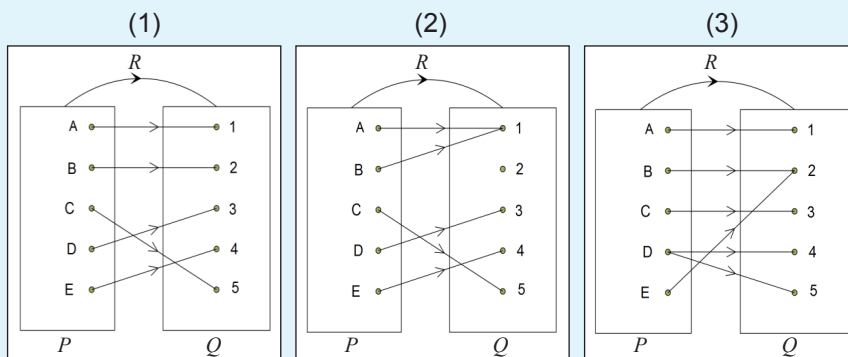
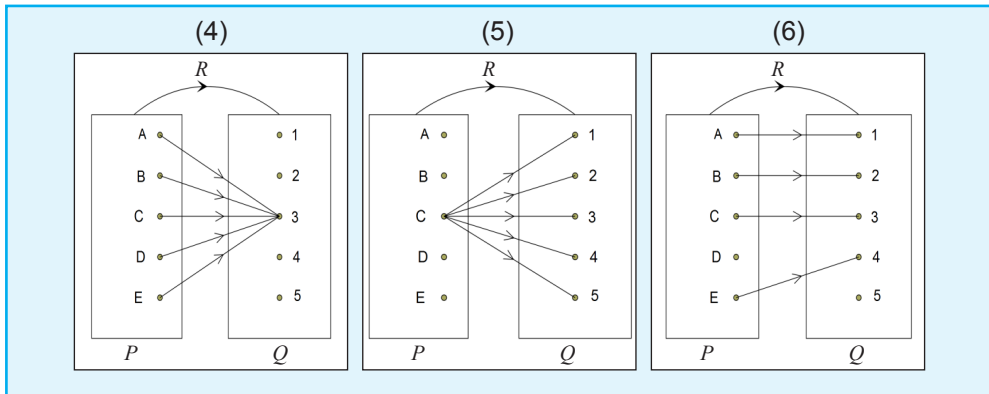
a) Relasi yang mungkin yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu, ditunjukkan pada diagram panah berikut.

Gambar 5.8 Relasi banyak saudara

b) Jawabannya ya. Oleh karena data tentang banyak saudara kelima sahabat itu ada di anggota himpunan D, maka seluruh anggota himpunan C pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan D.

c) Jawabannya tidak. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi banyak saudara. Banyak saudara seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan C akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan D.

d) Jawabannya ya. Banyak saudara seseorang dimungkinkan sama dengan banyak saudara orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan C memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan D.

Masalah-5.3

Perhatikan relasi-relasi yang ditunjukkan pada gambar berikut.

Alternatif Penyelesaian

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Relasi 1:

– Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*
– Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan *Q*
– Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 2:

– Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
– Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan *Q*.
– Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 3:

– Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
– Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan *Q*.
– Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 4:

– Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
– Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan *Q*.
– Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 5:

- Ada anggota himpunan *P* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan semua anggota himpunan *Q*.
- Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 6:

- Ada anggota himpunan *P* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 1, relasi 2 dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan *Q*.

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Relasi 1:

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*
- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan *Q*
- Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 2:

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 3:

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan *Q*.
- Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 4:

– Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
– Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q.
– Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 5:

– Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
– Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan semua anggota himpunan Q.
– Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 6:

– Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
– Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 1, relasi 2 dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

– Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
– Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q.

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita temukan definisi fungsi sebagai berikut.

Definisi 5.6

Misalkan A dan B himpunan.
Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Definisi 5.6 di atas, secara simbolik ditulis menjadi $f : A \rightarrow B$, *dibaca:* fungsi f memetakan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Jika f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh fungsi f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$ dan x disebut prapeta dari y, dengan demikian dapat ditulis menjadi:
$f : x \rightarrow y$, dibaca: fungsi f memetakan x ke y, sedemikian sehingga $y = f(x)$.

Perhatikan kembali Masalah 5.3 di atas, berilah alasan mengapa relasi 3, relasi 5, dan relasi 6 bukan fungsi.

Penyelesaian

1) Relasi 3 bukan fungsi karena ada anggota himpunan P yang berpasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu D yang berpasangan dengan 4 dan 5 meskipun seluruh anggota himpunan P memiliki pasangan di anggota himpunan Q.
2) Relasi 5 bukan fungsi karena:
   a. Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q yaitu $\{A, B, D, E\}$.
   b. Ada anggota himpunan P yang memiliki pasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu $\{C\}$.
3) Relasi 6 bukan merupakan fungsi karena ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan aggota himpunan Q yaitu $\{D\}$.

Contoh 5.12

Diketahui fungsi $f : x \to f(x)$ dengan rumus fungsi $f(x) = px - q$. Jika $f(1) = -3$ dan $f(4) = 3$. Tentukanlah nilai p dan q, kemudian tuliskanlah rumus fungsinya.

Penyelesaian

Diketahui $f(x) = px - q$.

$f(1) = -3$

$f(4) = 3$.

Ditanya p, q, dan Rumus fungsi

Jika $f(1) = -3$ maka $f(x) = px - q \to -3 = p - q$ .... (1)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Jika $f(4) = 3$ maka $f(x) = px - q \to 3 = 4p - q$ .... (2)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Jika persamaan 1) dan persamaan 2) dieliminasi maka diperoleh:

$-3 = p - q$

$\underline{3 = 4p - q}$ _

$-6 = p - 4p \to -6 = -3p \to p = 2$

Substitusi nilai $p = 2$ ke persamaan $-3 = p - q$

Sehingga diperoleh:

$-3 = 2 - q$

$-3 = 2 - q \to q = 2 + 3 \to q = 5$

Jadi diperoleh $p = 2$ dan $q = 5$
Berdasarkan kedua nilai ini, maka rumus fungsi $f(x) = px - q$ menjadi $f(x) = 2x - 5$.

Contoh 5.13

Diketahui fungsi f dengan rumus $f(x) = \sqrt{2x+6}$. Tentukanlah domain fungsi f agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.

Penyelesaian

Diketahui: $f(x) = \sqrt{2x+6}$
Ditanya: domain f

Domain fungsi f memiliki pasangan dengan anggota himpunan bilangan real apabila
$2x + 6 \geq 0$,
$2x \geq -6 \quad \leftrightarrow \quad x \geq -3$.

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:
a) Mengapa fungsi f memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real apabila $2x + 6 \geq 0$.
b) Apakah f terdefinisi untuk $2x + 6 < 0$?
c) Apakah $x = -4$ memiliki pasangan? Mengapa?

Contoh 5.14

Diketahui f suatu fungsi $f : x \rightarrow f(x)$. Jika 1 berpasangan dengan 4 dan $f(x+1) = 2f(x)$. Berapakah pasangan dari $x = 4$?

Penyelesaian

Diketahui: $f : x \rightarrow f(x)$
$f(1) = 4$
$f(x+1) = 2\,f(x)$

Ditanya: $f(4)$?
$\rightarrow f(x+1) = 2f(x)$

→ untuk $x = 1$, maka $f(1+1) = 2f(1)$
→ $f(2) = 2.f(1) = 2.4 = 8$
→ $f(3) = 2.f(2) = 2.8 = 16$
→ $f(4) = 2.f(3) = 2.16 = 32$
→ maka $x = 4$ berpasangan dengan 32 atau $f(4) = 32$.

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:
a) Berapakah pasangan dari x = 2013?
b) Bagaimana cara paling cepat untuk menemukan pasangan dari x = 2013?

Contoh 5.15

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}$. Tuliskanlah rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

Penyelesaian

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}$. Tuliskanlah rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

Diketahui: $y = \frac{x+2}{2x-6}$, dimana $2x - 6 \neq 0$ dan x anggota bilangan real.

Ditanya: rumus fungsi y ke x.

→ $y = \frac{(x+2)}{(2x-6)}$ (kedua ruas kalikan dengan $2x - 6$)
→ $(2x - 6)(y) = x + 2$
→ $2xy - 6y = x + 2$
→ $2xy - x = 6y + 2$
→ $x(2y - 1) = 6y + 2$
→ $x = \frac{(6y+2)}{(2y-1)}$ (kedua ruas bagi dengan $2y - 1$)

Maka fungsi g memetakan y ke x dengan rumus: $g(y) = \frac{x+2}{2x-6}$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

a) Jika $f: x \rightarrow y$, apakah x = 3 memiliki pasangan di anggota himpunan real? Mengapa?

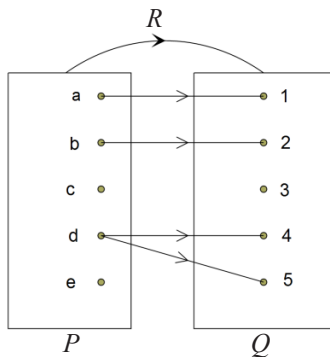
b) Jika $g: y \rightarrow x$. apakah $x = \frac{1}{2}$ memiliki pasangan di anggota himpunan real? Mengapa?

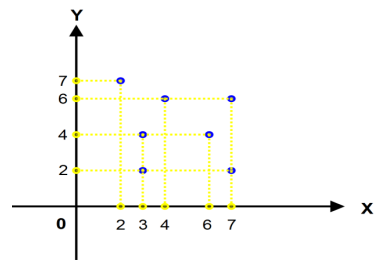
c) Berikan syarat agar $f: x \rightarrow y$ dapat terdefinisi.

d) Berikan syarat agar $g: y \rightarrow x$ dapat terdefinisi.

Uji Kompetensi 5.1

1) Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari relasi berikut.

   a)

   b) Relasi pasangan berurutan: {(Yaska, Nora), (Riwanti, Pasaribu), (Felix, Krisantus), (Ramsida, Dahniar)}

   c)

2) Sekumpulan anak yang terdiri atas 5 orang yaitu (Margono, Marsius, Maradona, Marisa, Martohap) berturut-turut berusia 6, 7, 9, 10, dan 11 tahun. Pasangkanlah usia masing-masing anak pada bilangan prima yang kurang dari 15. Apakah semua anak dapat dipasangkan? Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah asilnya!

3) Diberikan himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5} dan himpunan B = {2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12}. Nyatakanlah relasi A terhadap B dengan relasi berikut.

a) Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi $B = A + 1$.

b) Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi $B = 2A + 2$.

Kemudian periksa apakah relasi yang terbentuk adalah fungsi atau tidak.

4) Jika siswa direlasikan dengan tanggal kelahirannya. Apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Berikan penjelasanmu!

5) Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x^2 \neq 1$ tentukanlah $f(-x)$.

6) Jika $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, tuliskanlah x sebagai fungsi dari y. Kemudian tentukanlah syarat kedua rumus fungsi tersebut agar terdefinisi untuk setiap x,y merupakan bilangan real.

7) Diketahui $f(2x–3) = 4x–7$, maka nilai dari $f(17) - f(7)$ adalah….

8) Bila $f(x) = \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b^2}{x^2}\right] + \dfrac{x}{b}\left[1 - \dfrac{a^2}{x^2}\right]$, maka $f(a+b)$= ...

9) Misalkan $f(n)$ didefiniskan kuadrat dari penjumlahan digit n. Misalkan juga $f(f(n))$ dan $f^3(n)$ didefinisikan $f(f(n))$ dan $f^3(n)$ didefinisikan $f(f(f(n)))$ dan seterusnya.Tentukan $f^{1998}(11)$!

10) Diketahui fungsi f dengan rumus $f = \sqrt{\frac{1}{2}x - 8}$. Tentukanlah daerah asal fungsi f agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.

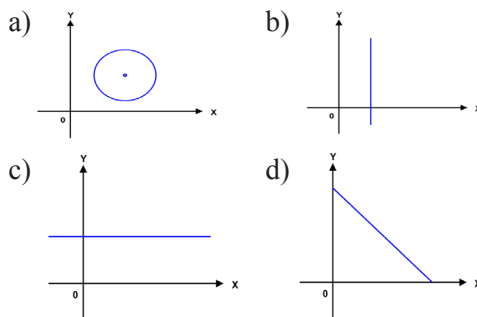
11) Perhatikan gambar berikut!

Manakah yang merupakan fungsi, jika daerah asalnya merupakan sumbu x.

a)

b)

c)

d)

Projek

Rancanglah sebuah masalah terkait lintasan seekor lebah yang terbang terkadang naik, bergerak lurus dan terkadang turun pada saat waktu tertentu. Tuliskan ciri-ciri fungsi tersebut, dan buat interval saat kapan lebah tersebut bergerak naik, lurus, dan saat turun. Buatlah laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada bahasan 5 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Setiap relasi adalah himpunan. Tetapi sebuah himpunan belum tentu merupakan relasi.
2. Setiap fungsi merupakan relasi. Tetapi sebuah relasi belum tentu merupakan fungsi.
3. Dari pernyataan (1) dan (2) disimpulkan bahwa setiap fungsi dan relasi adalah himpunan.
4. Relasi memiliki sifat, antara lain (1) reflektif, (2) simetris, (3) transitif, dan (4) sifat antisimetris. Jika sebuah relasi memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif, maka relasi tersebut dikatakan relasi ekuivalen.
5. Fungsi adalah bagian dari relasi yang memasangkan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain. Fungsi yang demikian disebut juga pemetaan.
6. Untuk lebih mendalami materi fungsi anda dapat mempelajari berbagai jenis fungsi pada sumber belajar yang lain, seperti fungsi naik dan turun, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi injektif, surjektif, dan fungsi satu-satu, dan sebagainya.

Selanjutnya akan dibahas tentang barisan dan deret. Barisan adalah sebuah fungsi dengan domain bilangan asli dan daerah hasilnya adalah suatu himpunan bagian dari bilangan real. Jadi pengetahuan kamu tentang relasi dan fungsi sangat menentukan keberhasilan kamu